ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

SESSION 1987

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : Les sept sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

SUJET N° 1

Un point m décrit une hyperbole équilatère H (à l'exception de ses sommets) de façon que la normale en m à H coupe les axes de H respectivement en p et en q .

Exprimer le rapport $\dfrac{\overline{mp}}{\overline{mq}}$ des mesures algébriques des segments $\overline{mp}$ et $\overline{mq}$.

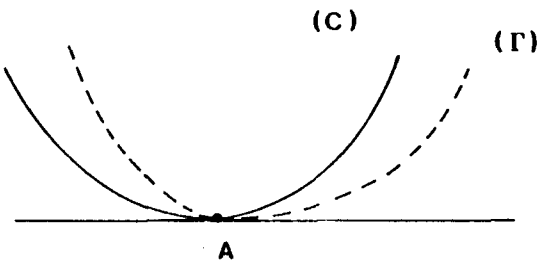
SUJET N° 2

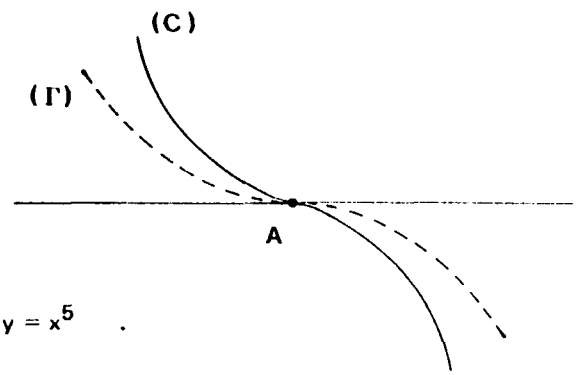
Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On dispose n^2 sphères rigides, de rayon r, dans une boîte dont le fond est un carré horizontal de côté $2nr$ et dont les 4 arêtes verticales ont pour longueur r , puis on pose $(n-1)^2$ sphères identiques aux précédentes sur cette première couche et ainsi de suite jusqu'à obtenir une figure pyramidale.

Calculer en fonction de n le rapport du volume de la réunion des sphères à celui de la pyramide définie par les quatre centres des sphères placées dans les coins de la cavité et par le centre de la sphère la plus haute. Quelle est la limite de ce rapport lorsque n tend vers l'infini ?

SUJET N° 3

Rappel : On dit que deux courbes planes C et Γ tangentes en un point A se traversent en A si elles sont disposées suivant l'un ou l'autre des deux schémas suivants :





a – Soient les courbes C et Γ d'équations $y = x^3$ et $y = x^5$.

Montrer qu'elles se traversent au point $(0, 0)$.

b – Soit la parabole P d'équation $y^2 = 2(x+1)$

1 – Soit l'ellipse E d'équation $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Donner l'équation d'une ellipse E' homothétique à l'ellipse E , tangente en $A = (1,2)$ à la parabole P et qui la traverse en A .

2 – Donner l'équation d'un cercle Γ_0 tangent en $M_0 = (x_0, y_0)$ à la parabole P et traversant P en M_0 .

T.S.V.P.

3 - Montrer que lorsque $t \in R$ varie , le point $(6t^2 , -8t^3)$ décrit la développée D de la parabole P .

4 – Donner les équations paramétriques de la développée D' de la courbe D .

SUJET N° 4

On rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux .

Soit A une matrice carrée telle que l'équation en X :

$$AX - XA = A$$

ait une solution X dans l'algèbre des matrices réelles d'ordre n .

Calculer la trace de la matrice A^{1000} .

SUJET N° 5

Soient $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ un polynome de degré n à coefficients complexes , et z_0 l'une de ses racines.

Démontrer l'inégalité :

$$|a_n|\,|z_0| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

SUJET N° 6

Soient $\mathcal{A}$ l'algèbre des matrices réelles d'ordre n , et A un élément de $\mathcal{A}$ égal à sa transposée.
Montrer que tout élément M de $\mathcal{A}$ peut s'écrire sous la forme $M = X + AY$, où X et Y sont des éléments de $\mathcal{A}$ et où $AX = 0$. Cette décomposition est-elle unique ?

SUJET N° 7

Soient P et P' deux plans euclidiens d'un espace de dimension 3 , V et V' les ensembles des vecteurs unitaires de P et de P' .

$$\text{Calculer : } \min_{\vec{a} \in V} \left[\max_{\vec{a}' \in V'} (\vec{a} \,|\, \vec{a}') \right]$$

où $(\vec{a} \,|\, \vec{a}')$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{a}'$.

»»»»»»»»»»o«««««««««««